数理解析研究所講究録
55巻 1968年 21-32

ベクトル値函数に対する境界値問題について

龍谷大学 文 藪田公三

§1. 序

次のような問題を考える。

$$(1)\begin{cases}\Delta\vec{u}(x)=0 & x\in\Omega \\ \vec{u}(x)=\vec{g}(x) & x\in\partial\Omega\end{cases}\qquad \left(\Omega\text{は}R^n\text{の中の領域}\quad \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

$\vec{u}(x)$, $\vec{g}(x)$ は Ω からある局所凸ベクトル空間(実数体又は複素数体上の) E への函数とする。

$$(2)\begin{cases}P(x,D)\vec{u}(x)=\vec{f}(x) & x\in\Omega \\ B_j(x,D)\vec{u}(x)=0 & x\in\partial\Omega \quad (j=1,2,\cdots,b=\frac{m}{2})\end{cases}$$

但し，$P(x,D)$は$2b$次の楕円型微分作用素で，$\{P(x,D),\ B_j(x,D)\}$ は Schechter 流の条件(後述)を満しているものとする。

上の問題が少し条件をつけると解けるということがわかる。同時にある微分方程式を満すベクトル値函数についてのいく

つかの性質も分る。(§4)。例えば，調和なベクトル値函数は，実解析的である。

§2. 記号と定義

ここでいくつかの函数空間を導入する。但し殆んどはSchwartz [1], [2] の用語を借用しそれの説明はしない。

Eを位相ベクトル空間とする。

$\mathcal{E}^m(\Omega, E)$はm回連続的微分可能なE-値函数の全体とする。$\mathcal{D}'(\Omega, E)$はE-値超函数の全体。ここで特にEを局所凸Hausdorffベクトル空間とする。$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$は，$\mathcal{D}'(\Omega, E)$に属し，その$m$回までの超函数の意味の導函数が次の意味ですべて$L^2(\Omega)$に属しているE-値函数の全体。導函数が$L^2$に属しているとは，$D^\alpha \vec{f}(x)$が弱可測でかつ，すべての$E$の連続なセミノルム$q$に対して$q(D^\alpha \vec{f}) \in L^2(\Omega)$ということである。この空間のセミノルムとしては，$(q_i)_{i \in I}$を$E$の位相を定義するセミノルムの集りとして，$\|\vec{\varphi}\|^2_{m, q_i} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |q(D^\alpha \vec{\varphi}(x))|^2 dx$がとれる。但しこの空間は仮りに$E$が完備であっても，完備にならないことがある。しかしEがFrechet空間なら$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$もFrechet空間になる。

※ $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$は$\Omega \subset\subset R^n$で$E$がsequencially completeなら，$\mathcal{E}^m(\Omega, E)$もsequencially completeになる。ただしK_jを$K_i \subset K_j (i \leq j)$かつ$\bigcup_i K_i = \Omega$なるcompactな集合の列として，セミノルムは$|\vec{\varphi}|_{m, q, K_j} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_j} q(D^\alpha \vec{\varphi}(x))$で与えられる。

§3. $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$に対するいくつかのLemma.

まず、位相ベクトル空間Eがquasi-completeであるとは、Eのすべての有界閉集合がcompleteであることをいう。この空間はsemi-completeである。compact集合の閉convex-hullはcompactである。以下、Eは局所凸、Hausdorff, quasi-completeとする。

Lemma 3.1. $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$ とすると、すべての $g(x) \in L^2(\Omega)$ に対して $\int_\Omega \vec{f}(x)\, g(x)\, dx$ は意味がある。$(\in E)$

Lemma 3.2. $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$, AをE'の同等連続な集合とすると、$p(e') = \int_\Omega |\langle \vec{f}(x), e' \rangle|^2 dx$ は Aの上で、E'の弱位相でinduceされた位相で連続である。

上の2つのLemmaによって次の(後の定理6で使う)LemmaのFourier係数の意味付けと、Diniの定理を使う根拠ができたことになる。

Lemma 3.3. $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,3,\dots}$ を $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ の完全正規直交系とする。$(\vec{f}, \varphi_i)_{m, L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \int D^\alpha \vec{f}(x)\, \overline{D^\alpha \varphi_i(x)}\, dx$ とする。この時、E'のすべての同等連続集合Aに対して

$\sum_{i=1}^{\infty} (\langle \vec{f}, e' \rangle, \varphi_i)_{m, L^2(\Omega)}\, \varphi_i(x)$ は $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$の位相で $\langle \vec{f}, e' \rangle$ に収束するが、この収束はA上一様である。

次のLemmaはE-値函数の弱微分可能性と強微分可能性の関係を与える。

Lemma 3.4. 開集合Ω(又は$\bar{\Omega}$)で定義されたE-値函数

$\vec{f}(x)$ が m回連続的弱微分可能ならば，m−1回連続的強微分可能である。

次のSobolevのLemmaは普通の数値函数の場合と同じ証明法で証明できる。

Lemma 3.5 $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{[\frac{n}{2}]+1+p}_{L^2}(R^n, E) \Longrightarrow \vec{f}(x)$ は p回連続的微分可能で，qをEのsemi-normeとしたとき

$$\sum_{|\alpha|\le p} \sup_{x\in R^n} q(D^\alpha \vec{f}(x)) \le C \left(\sum_{|\alpha|\le[\frac{n}{2}]+1+p} \| q(D^\alpha \vec{f}(x)) \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成りたつ。

Lemma 3.6. ($\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ に対するSobolevのLemma)

$\Omega (\subset R^n)$：開集合 で $\partial\Omega = \bigcup_j S_j$ 但し，S_j はm回連続的微分可能な閉超曲面とする。

$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$，$m \ge [\frac{n}{2}]+1 \Longrightarrow \vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{m-[\frac{n}{2}]-1}(\Omega, E)$

かつ $\sum_{|\alpha|\le m-[\frac{n}{2}]-1} \sup_{x\in\Omega} |q(D^\alpha \vec{f}(x))| \le C \left(\sum_{|\alpha|\le m} \| q(D^\alpha \vec{f}(x)) \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$

となる $C>0$ が存在する。

証明は $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ から $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ への拡張作用素（溝畑：偏 P.171）等を使って，Lemma 3.5を適用すればよい。

§4. 楕円型微分方程式のベクトル値解のregularities.

先のLemma 3.4を用いて，

Lemma 4.1. P(x, D)をhypoelliptic diff. op とすると，次の方程式の解は $\mathcal{E}^\infty(\Omega, E)$ に属する．

$P(x, D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$　　但し $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega, E)$.

ここにelliptic diff. op の解のregularitiesについて，Hörmander[1]

の Th. 7.5.1 の証明を注意深く見ることによって，

Lemma 4.2. $P(x,D)$ を係数が Ω で（実）解析的な elliptic diff. op. とする。かつ，$u(x)$ を $P(x,D)u(x)=f(x)$ の解とする。但し，$f(x)$ は Ω で実解析的である。すると，すべての Ω の compact な集合 K に対して，次の不等式を満す定数 M_u と A が存在する。

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)| \leq M_u A^{|\alpha|}(|\alpha|+n)^{|\alpha|+n}$$

但し，M_u は K, $u(x)$, $f(x)$, Ω, $P(x,D)$ に関係し，A は K, $f(x)$, Ω, $P(x,D)$ だけに関係する。

を得る。この Lemma によって次の命題を得る。

Prop. 4.1. $P(x,D)$ は Lemma 4.2 と同じ条件を満すとする。$\vec{u}(x)\in\mathcal{D}'(\Omega,E)$ が $P(x,D)\vec{u}(x)=\vec{f}(x)$ の解であるならば，$\vec{u}(x)$ も Ω で解析的である。但し，$\vec{f}(x)$ は Ω で解析的とする。

§5. Dirichlet 問題。

我々の考える問題は，スカラーの場合，Dirichlet 問題が解けるような領域に対しての Dirichlet 問題である。まず，定義として

定義 5.1. Ω を R^n の相対コンパクトな開集合としたとき，$H(\Omega)$ をコンパクト一様収束の位相を入れた Ω 上の調和函数の全体とし，$H(\bar{\Omega})$ を $H(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ とする。

定義 5.2. $Ch_H(\Omega)$ を $H(\bar{\Omega})$ に関する Ω の Choquet 境界

とする。

定理5.1. $\Omega (\subset\subset R^n)$ は開集合でかつ, $Ch_H(\bar{\Omega}) = \partial\Omega$ とする。このとき, 任意の $\partial\Omega$ 上の E-値連続函数 $\vec{g}(x)$ に対して, $\bar{\Omega}$ で連続な, 次の方程式の解が存在する。

$$\begin{cases} \Delta \vec{u}(x) = 0 \\ \vec{u}(x)|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}(x) \end{cases} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

証明に入る前に; $Ch_H(\bar{\Omega}) = \partial\Omega$ はスカラーの場合, Dirichlet問題が, 定理にいう通りに解けることを意味する。したがって, 解はweakに存在するわけであるけれども, それがE値函数として真の解になっているかどうか分らない。それだけが証明すべきことである。

Lemma 5.1. Ω を R^n の中で相対コンパクトで, $Ch_H(\bar{\Omega}) = \partial\Omega$ であるような開集合とする。すると次のような条件を満たす $\partial\Omega$ 上の正の measure の family $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ が存在する。

i) $\mu_x(h) = h(x) \qquad (h \in H(\bar{\Omega}),\ x \in \Omega)$

ii) $f;\ x \to \mu_x(g)$ は任意の $\partial\Omega$ 上の有界可測函数に対して, 調和函数を定める。特に g が $\partial\Omega$ 上連続なら $f(x)$ は $\bar{\Omega}$ で連続である。i.e.
$$\lim_{x \to t \in \partial\Omega} f(x) = g(t)。$$

証明は, Hinrichsen (1) p.249 の証明を見直せばよい。実際は調和函数の場合は, 正の Poisson kernel が存在する

のであるけれども、定理の証明に必要なのは、正の harmonic measure が存在することだけで、Brelot 式の公理的 Dirichlet 問題にも適用できるようにとの心積りのためだけである。

定理の証明. $\vec{u}(x) = \int \vec{g}(t)\, d\mu_x(t)$ とおく。これが意味を持つ事は, Grothendieck の critère による。明らかに、任意の $e' \in E'$ に対して $\Delta \langle \vec{u}(x), e' \rangle = 0$ である。Prop. 4.1 によって、$\vec{u}(x)$ は Ω で実解析的, 調和であることが分る。したがって残るのは, $\lim_{x \to t \in \partial\Omega} \vec{u}(x) = \vec{g}(t)$ を示すことであるから $\vec{u}(x)$ の定義をみれば $\vec{g}(t_0) = 0$ として $\lim_{x \to t_0} \vec{u}(x) = 0$ を示せばよい。

V を circular convex な E の閉近傍とする。V の polar V° は E'_s (弱位相を持った dual) の中で同等連続でコンパクトであり, E'_c (E の circular convex compact sets 上の一様収束位相を持って E の dual) の中でもそうである。

$G = \{\vec{g}(t) \in E\ ;\ t \in \partial\Omega\}$ とおく。$\partial\Omega$ がコンパクトで, $\vec{g}$ は連続であるから, G はコンパクトである。すると G° は E'_c の 0 の近傍になる。したがって, $e'_1, e'_2, \cdots, e'_m \in E'_c$ が存在して, $G' = (e'_1 + G^{\circ}) \cup \cdots \cup (e'_m + G^{\circ})$ が V° を含むようにできる。又 $(V^{\circ})^{\circ} = V$ であるから $G'^{\circ} \subset V$ が成り立つ。ここで, $e' = e'_i + e'_0 \in e'_i + G^{\circ}$ として, $|\langle \vec{u}(x), e' \rangle|$ を考えよう。

$|<\vec{u}(x), e'>| = |<\int \vec{g}(t)\,d\mu_x(t), e'>| = |\int <\vec{g}(t), e'>\,d\mu_x(t)|$
$= |\int <\vec{g}(t), e_1' + e_0'>\,d\mu_x(t)| \leq |\int <\vec{g}(t), e_1'>\,d\mu_x(t)| +$
$+ |\int <\vec{g}(t), e_0'>\,d\mu_x(t)| = I_1 + I_2$

I_1は Lemma 5.1 の iii) の性質によって，xがt_0の十分近くにあれば，1より小にできる。I_2はe_0'がG^0に属することによって，Lemma 5.1 の ii) の性質を使えば，やはり，1より小になる。したがって，xがt_0の十分近くにあれば$\vec{u}(x)$は$2G^0$に含まれる。したがって2Vに含まれる。すなわち，$\lim_{x\to t_0} \vec{u}(x) = 0$ である。解の一意性は，weakly に一意的なことから従う。　証明終り。

§6. 一般境界値問題。

序に出て来た次の問題を考える。

$$\begin{cases} A(x,D)\,\vec{u}(x) = \vec{f}(x) & (x \in \Omega) \quad (6.1) \\ B_j(x,D)\,\vec{u}(x) = 0 & (x \in \partial\Omega,\ j=1,2,\cdots,b=\frac{m}{2}) \quad (6.2) \end{cases}$$

mは偶数で，$A(x,D)$はm階の楕円型作用素，$B_j(x,D)$は normal system (1) で $\{A(x,D), B_j(x,D)\ (j=1,2,\cdots,b)\}$は complementing condition (2) を満たすとする。さらに，スカラーの境界値問題として Green 作用素 $G = A^{-1};\ \mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega) \to \mathcal{D}(A)$
$= \{u(x) \in \mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega);\ B_j(x,D)u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega,\ j=1,2,\cdots,b\}$
但し，$s = 0,1,2,\cdots,k$ として，kは適当な十分大きな正の整数とする。

定理 6.1. $k \geq [\frac{n}{2}]+1$ として，上の条件の下に，$s \geq k$ ~~ならば~~ で $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)$ ならば，(6.1) (6.2) の解が存在して，

(1) (2) は 満畑先生の [1]. p.427.

$\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{\Omega}, E)$に属する。

これを証明するのには、Sobolevの Lemma と Lemma 3.3と次の Lemma があればよい。

Lemma 6.1. Gを$\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$から$\mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)$の中への連続線型作用素とする。もし、$s+m \geq [\frac{n}{2}]+1$ならば、$G$を$\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega, E)$から$\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{\Omega}, E)$の中への線型作用素に拡張できる。

証明。$G ; \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega) \to \mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)$ conti. より $\|Gu\|_{m+s} \leq C\|u\|_s$, $u \in \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$ となる $C>0$が存在する。但し $\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\leq s}\int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$。さらに $(f(x), g(x))_s = \sum_{|\alpha|\leq s}\int D^\alpha f(x)\, \overline{D^\alpha g(x)}\, dx$, i.e. $\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$での内積とする。$\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$は可分Hilbert空間であるから、完全正規直交底 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$がとれる。

$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega, E)$, $\vec{b}_i = (\vec{f}, \varphi_i)_s$ とする。$\{\sum_{i=1}^{k} \vec{b}_i G\varphi_i(x)\}_{k=1,2,\dots}$ は $\mathcal{E}^{p}(\overline{\Omega}, E)$の Cauchy 列である。($p = s+m-[\frac{n}{2}]-1 \geq 0$)

実際、$|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x)|_p^{*}$　($e' \in E'$)

$$\leq C' \|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x)\|_{s+m} \qquad \text{(Sobolevの Lemma)}$$

$$\leq CC' \|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle \varphi_i(x)\|_{s}.$$

ここで Lemma 3.3を使うと、$\|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle \varphi_i(x)\|_s$は$E'$の同等連続な集合上で一様に0に収束する。($k, l \to +\infty$)。$E$の任意のセミノルム$q$は、$E$の閉 circular convex 近傍$V$で定義され、$q(e) = \sup_{e' \in V^\circ} |\langle e, e'\rangle|$であることと、$V^\circ$は同等連続な$E'$の部分集合で

* $|f(x)|_p = \sum_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|$

あることに注意すれば，$\sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i G\varphi_i(x)$ が $\mathcal{E}^p(\overline{\Omega}, E)$ の Cauchy 列であることが分る。$\mathcal{E}^p(\overline{\Omega}, E)$ が quasi-complete であることにより，$\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)$ から $\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{\Omega}, E)$ の中への連続線型作用素を $G\vec{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{b}_i G\varphi_i$ として定義することができる。

連続性は，

$$|\langle G\vec{f}(x_0), e'\rangle|_p = |\sum_{i=1}^{\infty} \langle \vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x_0)|_p <$$

$$< CC' \| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vec{b}_i, e'\rangle \varphi_i(x) \|_s = CC' \| \langle \vec{f}(x), e'\rangle \|_s$$

したがって，任意の E のセミノルム q に対して，

$$\sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \overline{\Omega}} q(D^\alpha G\vec{f}(x)) \leq CC' \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_\Omega |q(D^\alpha \vec{f}(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = CC' \|\vec{f}\|_{s,q}$$

が成り立つことより分る。　　　　　　　　　　証明終り。

☆定理 6.1 の証明は上の Lemma で殆んど終る。実際，e' を E' の任意の元とすると，$\langle G\vec{f}, e'\rangle$ は (6.1), (6.2) を満す。しかも $G\vec{f} \in \mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}$ であるから，ベクトル値函数として (6.1), (6.2) を満している。$\vec{u}(x) = G\vec{f}(x)$ とればよい。　　　　　証明終り。

参考文献

N. Bourbaki [1] : Espaces vectoriels topologiques. Ch. I–IV. Hermann.

[2] : Intégration. Ch. V　　　　Hermann

J. Dieudonné et L. Schwartz. La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$. Ann. Inst. Fourier 1. (1949). 61–101

A. Grothendieck : Sur certains espaces de fonctions holomorphes. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 192 (1953)

D. Hinrichsen : Randintegrale und nukleare Funktionenräume
Ann. Inst. Fourier 17. (1967)

L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer

S. Mizohata : 偏微分方程式論 岩波.

L. Schwartz (1) Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Mathématique 4 (1954–55). 88–148.
(2). Théorie des distributions 1 et 2.
(3) Théorie des distributions à valeurs vectorielles. 1. Ann. Inst. Fourier 7. (1957)
(4) Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Séminaire Schwartz 1953–54. Inst. Henri Poincaré.

K. Yabuta : Problèmes au bord pour les fonctions à valeurs vectorielles. à paraître.

一般境界値問題についてくわしくは.

M. Schechter : General boundary value problems for elliptic differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 19 (1959). 457–486.